Méthodes mathématiques pour physiciens I
Série 17

Exercice 1. Déterminer les harmoniques sphériques Y_{00}, Y_{10} et Y_{20} en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt par rapport à la famille de vecteurs de base $\left\{1, \cos\theta, \cos^2\theta\right\}$.

Exercice 2. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes, définies pour $a > 0$:

1. La fonction créneau

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } x \in (-a, a)\ , \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

2. L'exponentielle

$$f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto e^{-a|x|}\,.$$

3. La gaussienne

$$f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto e^{-a^2x^2}\,.$$

Exercice 3. Pour une densité de charge ρ non nulle seulement au voisinage de l'origine, on peut séparer, pour r assez grand, la variable radiale r des variables angulaires (θ, ϕ) dans la base des harmoniques sphériques,

$$\Phi\left(r, \theta, \phi\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}\,, \qquad q_{lm} = \int_{\mathbf{R}^3} \rho r^l \overline{Y}_{lm}\,.$$

Soit ρ la distribution de charge formée de deux demi-boules de rayon R placées l'une au dessus de l'autre avec une densité de charge uniforme mais de signe opposé,

$$\rho\left(r, \theta\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < R \text{ et } \theta \in [0, \pi/2)\,, \\ -1 & \text{si } r < R \text{ et } \theta \in (\pi/2, \pi]\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Déterminer :

1. Le monopôle q,
$$q = \sqrt{4\pi} q_{00}\,.$$
2. Le dipôle $\vec{p}$,
$$p_x = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \operatorname{Re} q_{11}\,, \qquad p_y = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \operatorname{Im} q_{11}\,, \qquad p_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} q_{10}\,.$$
3. Les moments quadrupolaires q_{22}, q_{21} et q_{20}.

Remarque : la distribution ρ étant réelle, les moments négatifs sont donnés par $q_{l,-m} = (-1)^m \overline{q}_{lm}$.

Exercice 4. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sin x & \text{pour } x \geq 0\,. \\ 0 & \text{pour } x < 0\,, \end{cases}$$

2.
$$g(x) = |x|e^{-|x|}\,.$$

Exercice 5. Déterminer pour quelles fonctions R_{lm} la fonction

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\,,$$

est solution de l'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$.

<u>Indications :</u> En coordonnées sphériques (r,θ,ϕ), le laplacien d'une fonction scalaire différentiable F est

$$\Delta F = L_r F + \frac{1}{r^2}L_{\theta\phi}F\,,$$

où

$$L_r F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)\,, \qquad L_{\theta\phi}F = \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\,.$$

Les harmoniques sphériques sont fonctions propres de l'opérateur $L_{\theta\phi}$,

$$L_{\theta\phi}Y_{lm} = -l\,(l+1)\,Y_{lm}\,.$$

Déduire alors une équation différentielle pour les fonctions R_{lm} et la résoudre avec l'ansatz $R_{lm}(r) = r^{\alpha}$.