Introduction aux méthodes perturbatives – Série 1, corrigé

04 mars 2016

Exercice 1

Montrer que si f est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0), alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} \ .$$

Démonstration : Prenons $\partial_x u(x_0, y_0)$. Si cette dérivée existe, alors elle est définie par

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \lim_{h \to o} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \ . \tag{1}$$

Puisque f est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0), nous avons en particulier, par définition et où nous notons $(\mathrm{A})_{ij} = a_{ij}$,

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + r(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \ . \tag{2}$$

Insérant (2) évaluée en $(x_0 + h, y_0)$ dans (1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(a_{11}(x_0 + h - x_0) + a_{12}(y_0 - y_0) + r(x_0 + h, y_0) \cdot h \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(a_{11} + r(x_0 + h, y_0) \right) = a_{11} + r(x_0, y_0) = a_{11} \ . \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré simultanément que $\partial_x u(x_0, y_0)$ existe et que c'est le coefficient a_{11} de la matrice A. De coefficient en coefficient on démontre ainsi l'énoncé.

Exercice 2

Montrer que l'existence des dérivées partielles n'implique pas la $\mathbb{R}$-différentiabilité et même pas la continuité. On travaille ici avec des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Démonstration : Prenons la fonction $f_1(z)$ définie par

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \ , \ v_1(x, y) = 0 \ .$$

Les dérivées partielles s'obtiennent aisément dans tout $\mathbb{R}^2$, y compris à l'origine. Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(h, 0) - f_1(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \ . \\ \partial_y f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(0, h) - f_1(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \ . \end{aligned}$$

Cependant, en passant en représentation polaire, on constate que

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} f_1(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) &= \lim_{\rho \to 0} \begin{cases} \dfrac{\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2} & , \text{ pour } \rho > 0 \\ 0 & , \text{ pour } \rho = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & , \text{ pour } \rho > 0 \\ 0 & , \text{ pour } \rho = 0 \end{cases} \ , \end{aligned}$$

qui n'est pas continue à l'origine.

Prenons la fonction $f_2(z)$ définie par

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \ , \ v_2(x, y) = 0 \ .$$

Cette fonction est continue à l'origine. En effet, $f_2(0,0)=0$ et en coordonnées polaires on a pour $\rho \neq 0$

$$|f_2(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))| = |\frac{\rho^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)}{\rho^2}| \leq \rho \ .$$

On vérifie que

$$\partial_x f_2(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \ .$$
$$\partial_y f_2(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_2(0,h)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \ .$$

Ainsi, si f_2 était différentiable, on aurait que (voir (2) avec $x_0 = y_0 = 0$)

$$r(x,y) = \left[f_2(x,y) - f_2(0,0) - \partial_x f_2(0,0)x - \partial_y f_2(0,0)y\right]/\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \cos^2(\theta)\sin(\theta),$$

avec $r(0,0)=0$ alors qu'en réalité $r(x,y)$ n'est pas continue à l'origine.

On peut vérifier aussi que les dérivées partielles

$$\partial_x f_2(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$
$$\partial_y f_2(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \ ,$$

ne sont pas continues à l'origine. En effet, en coordonnées polaires,

$$\lim_{\rho\to 0}\partial_x f_2(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^4\cos(\theta)\sin(\theta)^3}{\rho^4} = 2\cos(\theta)\sin(\theta)^3 \ ,$$
$$\lim_{\rho\to 0}\partial_y f_2(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^4(1-\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2)}{\rho^4} = 1-\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 \ .$$

Exercice 3

Une fonction $\mathbb{C}$-différentiable est $\mathbb{R}$-différentiable et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \ \partial_y u = -\partial_x v \ .$$

Démonstration : Pour pouvoir écrire une fonction $\mathbb{C}$-différentiable selon la définition de $\mathbb{R}$-différentiabilité il suffit de vérifier qu'il existe une matrice A telle que

$$f'(z_0)(z-z_0) \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \ .$$

Nous notons $z_* = z - z_0$, avec $z = x+iy$, afin d'alléger la notation. Puisque $f'(z_0)$ est un nombre complexe, notons-le $a+ib$. Ainsi

$$f'(z_0)z_* = ax_* - by_* + ibx_* + iay_* \ .$$

Il nous faut donc simplement une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Ensuite, puisque nous avons une fonction $\mathbb{R}$-différentiable, nous savons que

$$a_{11} = \partial_x u \ , \ a_{12} = \partial_y u \ ,$$
$$a_{21} = \partial_x v \ , \ a_{22} = \partial_y v \ .$$

Puisque A a la structure donnée en (3) puisqu'elle est aussi $\mathbb{C}$-différentiable, il vient nécessairement que

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \ \partial_y u = -\partial_x v \ .$$

Exercice 4

Montrer que

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & , \text{ pour } z \neq 0 \\ 0 & , \text{ pour } z = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles selon x et y en $(x, y) = 0$ qui satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, sans pour autant être $\mathbb{C}$-différentiable en $z = 0$.

Démonstration : En notation vectorielle, la fonction $f(z)$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \end{pmatrix} & , \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Les dérivées partielles en $(0, 0)$ sont définies par

$$\partial_x u(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1 ,$$
$$\partial_y u(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 ,$$
$$\partial_x v(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 ,$$
$$\partial_y v(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1 ,$$

ce qui satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. En revanche,

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in U \\ z\neq 0}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z^5}{|z|^4} - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{|z|^4}$$
$$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \forall\theta}} \frac{(\rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta))^4}{\rho^4} = e^{i4\theta} .$$

N'étant pas égale à une constante, la limite ne peut exister, et donc la fonction n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable.

Exercice 5 Prenons la fonction $f(z)$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{4}$$

D'abord, on va montrer que

$$\lim_{h\to 0} e^{-1/h^2}/h^k = 0, \tag{5}$$

pour chaque k fini. Pour démontrer ça, on considère

$$\left(h^k e^{1/h^2}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^{k-2n}/n!\right)^{-1} < h^{2p-k}p! \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

En prenant la limite $h \to 0$ avec un p qui satisfait $2p > k$ on vérifie (5).

Avec (5), on trouve facilement

$$\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2} - 0}{h} = 0, \tag{6}$$

et alors

$$\partial_x u(0,0) = \partial_y u(0,0) = \partial_x v(0,0) = \partial_y v(0,0) = 0, \tag{7}$$

ce qui satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est alors $\mathbb{C}$- et $\mathbb{R}$-différentiable en $z = 0$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on trouve les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-1/(x^2+y^2)}, \\ \partial_y f(x,y) &= \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-1/(x^2+y^2)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Comme on a $\partial_x v(x, y) = \partial_y v(x, y) = 0$ partout en $\mathbb{R}^2$, les conditions de Cauchy-Riemann ne sont satisfaites que pour $z_0 = (0, 0)$. La fonction $f(z)$ n'est alors pas holomorphe en z_0 parce qu'il n'éxiste aucun voisinage de z_0 où elle est $\mathbb{C}$-différentiable.

Exercice 6 Soit ρ le rayon de convergence de la série

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \ .$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} f : D(c,\rho) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = s \end{aligned}$$

est holomorphe et

$$f'(z) = g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k \ ,$$

pour tout $z \in D(c,\rho)$ (même rayon de convergence), avec $b_k = a_{k+1}(k+1)$.
Démonstration : Tout d'abord, le rayon de convergence de la série

$$s' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k$$

est

$$1/\rho' = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{1/k}(k+1)^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}} = 1/\rho \ , \tag{9}$$

qui est le même que celui de s. Ainsi, s' converge dans $D(c,\rho)$. Pour le dernier pas, on a utilisé

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|^{1/k}}{|a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}}} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{\frac{1}{k(k+1)}} = \limsup_{k\to\infty} \left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\right)^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/\rho} = 1.$$

Il reste à montrer que f est holomorphe, et que sa dérivée coincide avec s'. Ceci n'est pas trivial, car on ne peut pas a priori permuter les opérations de sommation et de dérivation.

Si et seulement si la fonction $g(z)$ est bien la dérivée de $f(z)$ on a que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| < \varepsilon, \tag{10}$$

pour $|z - z_0| < \delta$ et $z, z_0 \in D(c,\rho)$.

Pour démontrer ça, on écrit

$$\begin{gathered} f(z) = s_n(z) + R_n(z), \\ s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-c)^k \ , \qquad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-c)^k \ , \end{gathered} \tag{11}$$

et

$$\begin{gathered} g(z) = s_n'(z) + \tilde{R}_n(z), \\ t_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z-c)^k \ , \qquad \tilde{R}_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k (z-c)^k \ , \end{gathered} \tag{12}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq \left| \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right| + \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| + |\tilde{R}_n(z)|. \tag{13}$$

Parce que $|\tilde{R}_n(z)|$ est bornée par le reste d'une série convergente qui ne dépend pas de z

$$|\tilde{R}_n(z)| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| \rho_2^k, \tag{14}$$

où $|z - z_0| < \rho_2 < \rho$, il existe un n_0 (qui est indépendant de z) tel que $|\tilde{R}_n(z)| < \varepsilon/3 \ \forall \ n > n_0$.

Parce que $s_n(z)$ est une somme finie, sa dérivée et bien donnée par $t_n(z)$ et on peut trouver un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - t_n(z_0) \right| < \varepsilon/3, \tag{15}$$

pour tout $|z - z_0| < \delta_1$ et $z, z_0 \in D(c, \rho)$. Le terme dans (13) qui reste peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{(z-c)^k - (z_0 - c)^k}{z - z_0} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{p=0}^{k-1} (z-c)^p (z_0 - c)^{k-1-p} \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \rho_2^{k-1}, \end{aligned} \tag{16}$$

où on a utilisé l'identité

$$\sum_{p=0}^{k-1} x^p y^{k-1-p} (x - y) = \sum_{p=1}^{k} x^p y^{k-p} - \sum_{p=0}^{k-1} x^p y^{k-p} = x^k - y^k. \tag{17}$$

Comme le membre gauche de (16) est bornée par une série convergente qui ne dépend pas de z, il existe un n_1 (qui est indépendant de z) tel que

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon/3 \quad \forall \ n > n_1.$$

En choisissant $n > n_0, n_1$, on a alors montré qu'il existe un $\delta > 0$ et $< \delta_1$ tel que (10) est vraie pour $|z - z_0| < \delta$ et $z, z_0 \in D(c, \rho)$. Puisque ε est arbitraire, $g(z)$ coincide avec la dérivée de $f(z)$.