Introduction aux méthodes perturbatives – Série 2, corrigé

6 mars 2015

Soit la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \ \text{sur } D(0,1) \ ,$$

avec

$$a_k = (-1)^k \ , \ k = 0, 1, \ldots \ .$$

On va faire comme si l'on ne savait pas qu'en réalité $f(z) = \frac{1}{1+z}$, sur $\mathbb{C} \backslash \{-1\}$. On aimerait calculer la valeur $f(3/2)$ en se servant d'un développement en série en $z = 1/2$,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - \frac{1}{2})^m \ , \ \text{sur } D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \ .$$

Démonstration : Rappel : soit une fonction h définie par une série entière $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ dans $D(z_0, \rho)$. Soit $z_1 \in D(z_0, \rho)$. Alors la série entière de h en z_1 est $\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_1)^k$, avec

$$d_m = \frac{1}{m!} h^{(m)}(z_1) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c_k (z_1 - z_0)^{k-m} k!}{(k-m)! m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+m} (z_1 - z_0)^n (n+m)!}{n! m!} \ .$$

On prouve maintenant le résultat demandé. On a par le rappel ci-dessus

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} (n+m)!}{n! m!} \left(\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \ ,$$

Où on a utilisé

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n! m!} z^n = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}, \tag{1}$$

ce que on peut démontrer en utilisant le raisonement par récurrence.

On peut vérifier que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - \frac{1}{2})^m,$$

converge sur $D(1/2, 3/2)$ et est alors une continuation analytique de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Admettons (pour l'exercice), que nous n'ayons à disposition que les coefficients a_k pour $k = 0, 1, \ldots, N$. Le calcul des b_m en est affecté, nous avons

$$b_{m,N} = \sum_{n=0}^{N-m} \frac{a_{n+m} (n+m)!}{2^n n! m!}$$

et donc

$$f_{N,M}(z) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N-m} \frac{a_{n+m} (n+m)!}{2^n n! m!} \left(z - \frac{1}{2}\right)^m \ , \ M \leq N \ .$$

Nous allons voir que pour un N fixé, M ne doit pas être choisi maximal pour que l'erreur soit minimale ! Soit

$$|R_{N+1,M+1}(z)| = |f(z) - f_{N,M}(z)|$$

l'erreur que l'on fait quand on n'a qu'un certain nombre N des coefficients a_n (nous calculons cette erreur en comparant au résultat exact que nous connaissons, car dans ce cas simple les "vrais" b_n sont connus). Alors, pour $z = 3/2$, on a

$$\begin{aligned}
b_m - b_{m,N} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m}(n+m)!}{2^n n! m!} - \sum_{n=0}^{N-m} \frac{a_{n+m}(n+m)!}{2^n n! m!} \\
&= \sum_{n=N-m+1}^{\infty} \frac{a_{n+m}(n+m)!}{2^n n! m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+N+1}(n+N+1)!}{2^{n+N+1-m}(n+N+1-m)! m!} \\
&= \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1-m}} \binom{N+1}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(n+N+1)!(N-m+1)!}{(n+N+1-m)!(N+1)!} \\
&= \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1-m}} \binom{N+1}{m} {}_2F_1(1, N+2; N+2-m; -1/2),
\end{aligned}$$

où ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique. L'erreur est alors donné par

$$\begin{aligned}
\left| R_{N+1,M+1}\left(\frac{3}{2}\right) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} b_m - \sum_{m=0}^{M} b_{m,N} \right| \\
&= \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} b_m + \sum_{m=0}^{M} (b_m - b_{m,N}) \right| \\
&\leq \left| (-1)^{M+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{M+2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \right| \\
&\quad + \left| \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N-m+1}} \binom{N+1}{m} {}_2F_1\left(1, N+2; N+2-m; -\frac{1}{2}\right) \right| \\
&\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{M+2} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^{N-m+1}} \binom{N+1}{m},
\end{aligned}$$

où on a utilisé

$$\left| {}_2F_1\left(1, N+2; N+2-m; -\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{2}{3} \quad \text{pour} \quad m \in [0, N].$$

Le premier terme d'erreur décroît clairement plus on prend de termes dans la suite tronquée, mais où le deuxième terme quant à lui augmente avec M de sorte qu'il s'agit de trouver un compromis. De plus, on voit que le nombre M depend du nombre N de coefficients a_n que l'on a disposition dans la série tronquée du développement en $z = 0$. La figure ci-dessous présente l'erreur en fonction de M et N (pas la borne calculée ci-dessus).

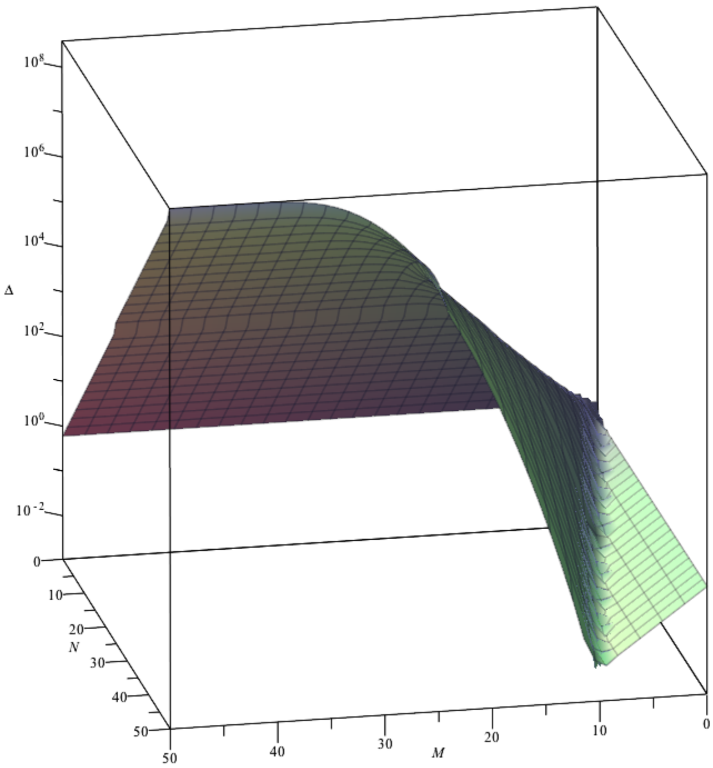

FIGURE 1 – Erreur en fonction de M et N.