Méthodes perturbatives : Corrigé 3

1 Transformations conformes

Discuter les actions sur le plan complexe des fonctions f suivantes ainsi que de leur réciproque :

1.
$$f(z) = \frac{1}{z}\,,$$

En prenant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $z^{-1} = r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ et donc f applique un disque de rayon r sur un disque de rayon $1/r$ et l'orientation est inversée.

2.
$$f(z) = z^2\,,$$

En prenant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ et donc f applique un disque de rayon r sur deux fois un disque de rayon r^2. La fonction inverse $\sqrt{z}$ est définie uniquement dans un plan privé d'une ligne allant de l'origine à l'infini. En prenant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors $\sqrt{z} = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, et donc un demi-disque de rayon r est appliqué sur un disque de rayon $\sqrt{r}$.

3.
$$f(z) = \mathrm{e}^z\,.$$

En prenant $z = x + \mathrm{i}y$, alors $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ et donc f applique les lignes horizontales sur des lignes et les lignes verticales sur des cercles en les recouvrant une infinité de fois. La fonction inverse $\log z$ est définie uniquement dans un plan privé d'une ligne allant de l'origine à l'infini. Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ alors $\log z = \log r + it$ et donc un cercle de rayon r est appliqué sur une ligne verticale allant de $-\pi$ à π par exemple.

2 Transformation de Borel d'une série convergente

Soit
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^z$$
une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la transformée de Borel de f est la fonction
$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\,.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série définissant B est $+\infty$. Ainsi B est une fonction entière.

Soit $r < R$, alors
$$\begin{aligned}|B(t)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}|t|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!}\left(\frac{|t|}{r}\right)^n r^n \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{|t|}{r}\right)^k\right)|a_n|\,r^n = \mathrm{e}^{|t|/r}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n\,.\end{aligned}$$
La dernière somme converge puisque $r < R$.

2. Soit $0 < r < R$. Montrer qu'il existe $C \ge 0$ tel que
$$|B(t)| \le C\mathrm{e}^{|t|/r}\,.$$

Comme la série de la borne du point précédent converge alors
$$|B(t)| \leq C\mathrm{e}^{|t|/r}\,.$$

3. En déduire que l'intégrale
$$L(s) = \int_0^\infty B(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > R^{-1}$.

En prenant dans le point précédent, r tel que
$$\frac{1}{\mathrm{Re}(s)} < r < R\,,$$
alors l'intégrale converge absolument.

4. Pour $\mathrm{Re}\left(z^{-1}\right) > R^{-1}$, soit
$$g(z) = \frac{1}{z}L\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\int_0^\infty B(t)\mathrm{e}^{-t/z}\mathrm{d}t\,.$$
Montrer que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D$ où
$$D = \left\{z\,:\,\mathrm{Re}(z^{-1}) > R^{-1}\right\}\,.$$

Comme $L(s)$ est fini pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > R^{-1}$, et que la convergence est absolue, alors on peut permuter la somme et la série dans la définition de $L(s)$,
$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^\infty B(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}t^n\right)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty t^u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{s^n} = \frac{1}{s}f\left(\frac{1}{s}\right)\,.
\end{aligned}$$
Ainsi
$$g(z) = \frac{1}{z}L\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$$
pour tout $z \in D$.

5. Considérer les exemples suivants :
$$\text{(a)}\quad a_n = 1\,, \qquad \text{(b)}\quad a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,, \qquad \text{(b)}\quad a_n = \frac{1}{n+1}\,.$$

Pour le premier cas,
$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad B(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^t\,.$$
Pour le deuxième,
$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)z^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\,z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}\,,$$
$$B(t) = \sum_{n=0}^\infty \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t)\,.$$
Enfin pour le troisième,
$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}z^n = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}z^{n+1} = -\frac{1}{z}\log(1-z)\,,$$
$$B(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^t - 1\right)\,.$$