Méthodes perturbatives : Corrigé 4

1 Exemple de série de Borel

Considérer la série formelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{avec} \qquad a_n = (-1)^n \, n! \, .$$

1. Déterminer le rayon de convergence de sa transformation de Borel

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \, .$$

Le rayon de convergence est

$$\left(\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{n!} \right|^{1/n} \right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty} 1^{1/n} \right)^{-1} = 1 \, .$$

2. Calculer la continuation analytique de la transformation de Borel et déduire que la série est Borel sommable.

La transformation de Borel est

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, t^n = \frac{1}{1+t} \, ,$$

et donc la série est Borel sommable.

3. Déterminer le domaine d'analyticité de la somme de Borel,

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/z} B(t) \mathrm{d}t \, ,$$

et déterminer son expression lorsque $z > 0$ en fonction de la fonction gamma,

$$\Gamma(n; x) = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{n-1} \mathrm{d}t \, .$$

La série est Borel sommable pour tout $R > 0$, et donc le domaine d'analyticité est

$$D(\infty) = \left\{ z \, : \, \mathrm{Re}(z^{-1}) > 0 \right\} = \{ z \, : \, \mathrm{Re}(z) > 0 \} \, .$$

Nous avons explicitement pour $z > 0$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/z} \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{z} \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-(y-1)/z} \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \frac{1}{z} \mathrm{e}^{1/z} \int_1^{\infty} \frac{1}{y} \mathrm{e}^{-y/z} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{z} \mathrm{e}^{1/z} \int_{1/z}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{z} \mathrm{e}^{1/z} \Gamma(0, 1/z) \, . \end{aligned}$$

4. Montrer que

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ \mathrm{Re}(z)>0}} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = a_n \, .$$

En effectuant le changement de variable $u = t/z$, alors

$$g(z) = \int_{\gamma} \mathrm{e}^{-u} B(uz) \mathrm{d}u = \int_{\gamma} \mathrm{e}^{-u} \frac{1}{1+uz} \mathrm{d}u \, ,$$

où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la courbe définie par $\gamma(s) = s\frac{|z|}{z}$. La dérivée n-ième de l'intégrant est

$$\partial_z^n \frac{1}{1+uz} = (-1)^n \, n! \frac{u^n}{1+uz} \, ,$$

et donc en prenant la limite $z \to 0$,

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Re}(z)>0}} g^{(n)}(z) = (-1)^n\, n! \int_\gamma \mathrm{e}^{-u} u^n \mathrm{d}u = (-1)^n\, (n!)^2\,.$$

2 Somme de Borel

Pour une série formelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,,$$

sa transformation de Borel est

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n\,.$$

En supposant que la série soit Borel sommable, alors la somme de Borel est

$$g(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/z} B(t)\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que g est analytique dans $D(R) = \left\{z \,:\, \mathrm{Re}(z^{-1}) > R^{-1}\right\}$ pour un certain $R > 0$.

Comme la série est Borel sommable, il existe $R > 0$ tel que

$$\int_0^\infty |B(t)|\, \mathrm{e}^{-t/R}\mathrm{d}t < +\infty\,.$$

Le but est de montrer que la fonction

$$L(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tz} B(t)\mathrm{d}t$$

est analytique pour $\mathrm{Re}(z) > R^{-1}$. Comme la série de l'exponentielle est absolument convergente,

$$L(z) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-tz)^n\, B(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \int_0^\infty (-t)^n\, B(t)\mathrm{d}t\,,$$

la dernière série étant absolument convergente par le théorème d'inversion d'une série et d'une intégrale. Ainsi $L(z)$ admet un développement en série qui converge pour tout $\mathrm{Re}(z) > R^{-1}$ et dans est analytique dans cette région. Comme l'origine n'est pas dans cette région, il en suit directement que $g(z)$ est analytique dans $D(R)$.

2. Montrer que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in D(R)}} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = a_n\,.$$

En le changement de variable $u = t/z$, on a

$$g(z) = \int_\gamma \mathrm{e}^{-u} B(uz)\mathrm{d}u\,,$$

où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la courbe définie par $\gamma(s) = s\frac{|z|}{z}$. Comme

$$\partial_z^n B(uz) = u^n B^{(n)}(uz)\,,$$

alors

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in D(R)}} g^{(n)}(z) = B^{(n)}(0) \int_\gamma \mathrm{e}^{-u} u^n \mathrm{d}u = B^{(n)}(0) n! = a_n\,.$$