Méthodes perturbatives : Corrigé 5

1 Evaluation d'une série en dehors de son disque de convergence

Considérer la série
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{avec} \qquad a_n = (-1)^n \ .$$

1. Déterminer une application conforme permettant de calculer $f(-2)$ avec peu de termes.

Le but est d'obtenir une application conforme appliquant le disque unité sur
$$A = \mathbb{C} \setminus \{-1 + \mathrm{i}\, y \,, y \geq 0\} \ .$$
La succession d'opération permettant d'appliquer A sur le disque unité est
$$z \mapsto \mathrm{i}\,(z+1) \mapsto \sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} \mapsto \sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$
$$\mapsto \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} \mapsto \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ .$$
Alors en résolvant l'équation
$$w = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{w+1} \ ,$$
donc
$$\sqrt{\mathrm{i}\,(z+1)} = \frac{1}{w+1}\left(\sqrt{2} - w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\frac{\mathrm{i} - w}{w+1} \ ,$$
si bien que finalement
$$z = \varphi(w) = -1 - \left(\frac{w - \mathrm{i}}{w+1}\right)^2 \ .$$

2. A l'aide d'un ordinateur, calculer $f(-2)$ en connaissant n termes de la série originale. Calculer a précision obtenue suivant le nombre de termes utilisés.

Le point $z = -2$ est appliqué sur $w = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}$. Ainsi on connaissant N termes de la série de f, alors on il est possible de calculer N termes de la série en zéro de $g(w) = f(\varphi(z))$.
La série de g a un rayon de convergence $R = 1$, donc l'erreur en prenant N termes de la série de g est
$$|R_N(z)| \leq C\,(\sigma\,|z|)^N \ ,$$
où $\sigma > R^{-1} = 1$. Comme en fait $f(z) = (1+z)^{-1}$, alors
$$g(w) = f(\varphi(z)) = -\left(\frac{w+1}{w-\mathrm{i}}\right)^2 \ ,$$
et les coefficients de la série de g sont donnés explicitement par
$$b_n = \begin{cases} 1\,, & n = 0 \\ 2\,(-\mathrm{i})^n\,(1 + \mathrm{i}n)\ , & n \geq 1 \end{cases} \ .$$