Méthodes perturbatives – Corrigé 6

17 avril 2015

Elements de réponses pour l'Exercice 1

1. On a $b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}B(t)\Big|_{t=0}$, et par la définition des a_n et des b_n, on identifie $B(t) = \frac{1}{1+e^t}$. Cette fonction a des pôles en $i(2k+1)\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Elle est analytique partout ailleurs. On a donc $\rho = \pi$. Mais alors $\limsup |b_n|^{1/n} = \frac{1}{\pi}$, et donc $\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup(n!|b_n|)^{1/n} = \infty$ [rappel : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$], ce qui implique que s a un rayon de convergence nul.
2. La continuation analytique est simplement $\tilde{B}(t) = \frac{1}{1+e^t}$ et est définie pour tout $t \in \mathbb{C}\backslash\{i(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
3. On calcule $b_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}B(t)\Big|_{t=0}$ et on trouve $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{4}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{1}{48}$, ...
4. Montrons s est Borel-sommable. On a vu que $\tilde{B}$ est bien définie dans un voisinage de l'axe réel positif. De plus,
$$\int_0^\infty e^{-ts}\tilde{B}(t)dt = \int_0^\infty \frac{e^{-ts}}{1+e^t}dt$$
converge dès que $\Re(s) > -1$. Ainsi,
$$g(z) = \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{z}}}{1+e^t}dt$$
converge dès que $\Re\left(\frac{1}{z}\right) > -1$, autrement dit dans $\mathbb{C} \setminus D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. On évalue
$$\begin{aligned} g(1) &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+e^t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-2t}}{1+e^{-t}}dt = \int_0^\infty e^{-2t}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n e^{-nt}dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(n+2)t}dt = \sum_{n=2}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-nt}dt = \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln(2)\ . \end{aligned} \tag{1}$$
6. On veut que $\varphi(D(0,1))$ ne contienne pas les pôles de $\tilde{B}$. Autrement dit, on veut $|\varphi^{-1}(i(2n+1)\pi)|^2 \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a que $\varphi^{-1}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\beta}}$. On a
$$|\varphi^{-1}(i(2n+1)\pi)|^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)\right)$$
et la condition $|\varphi^{-1}(i(2n+1)\pi)|^2 \geq 1$ se récrit $\cos\left((2n+1)\pi/\beta\right) \leq \frac{1}{2}$ pour tout n. Le max est atteint lorsque n vaut 0 et -1. La condition est ainsi vérifiée si $\cos(\pi/\beta) \leq \frac{1}{2}$. On veut donc que $\pi/\beta \geq \arccos(1/2) = \pi/3$, d'où $\beta \leq 3$. On choisira donc optimalement
$$\beta = 3\ .$$
7. Par construction et par choix de β, les deux pôles de b les plus proches de l'origine sont sur le cercle unité. De plus, il y a un branch cut dû au log sur l'ensemble $\{w : \Re(w) > 1, \Im(w) = 0\}$. Le rayon de convergence est ainsi 1. On observe tout d'abord que
$$-\beta\log(1-w) = \beta\, w + 1/2\,\beta\, w^2 + \ldots$$
Ainsi, on a
$$\begin{aligned} b(w) &= b_0 + b_1(\beta\, w + 1/2\,\beta\, w^2 + 1/3 + \ldots) + b_2(\beta\, w + 1/2\,\beta\, w^2 + \ldots)^2 + \ldots \\ &= b_0 + \beta b_1 w + \left(\frac{b_1\beta}{2} + b_2\beta^2\right) w^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$
On identifie donc $c_0 = b_0$, $c_1 = \beta b_1$, $c_2 = \left(\frac{b_1\beta}{2} + b_2\beta^2\right)$. Par construction, $\varphi(0) = 0$, et donc l'expansion de φ ne contient pas de terme constant. Ceci permet de calculer le terme c_k en ayant connaissance seulement de $b_0, b_1, ..., b_k$, sans erreur de troncature supplémentaire. En remplaçant par les valeurs de β et b_i, on trouve $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{3}{4}$, $c_2 = -\frac{3}{8}$.