Méthodes perturbatives : Corrigé 7

1 Valeur propres d'une matrice perturbée

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de la matrice

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} ,$$

en fonction de ε. Discuter l'analyticité en ε des valeurs propres selon les paramètres a et b.

Les valeurs propres sont données par les zéro de

$$p_\varepsilon(\lambda) = \det(\lambda - T_\varepsilon) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1+\varepsilon \\ a+b\varepsilon & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b\varepsilon)(1+\varepsilon) ,$$

c'est-à-dire par

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{(a+b\varepsilon)(1+\varepsilon)} .$$

Lorsque $a \neq 0$, les valeurs propres sont analytiques. Par contre lorsque $a = 0$, les valeurs propres ne sont pas analytique

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{b\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon} ,$$

à moins que $b = 0$ aussi.

2 Projecteur

La résolvante d'une matrice T est la matrice

$$R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1} .$$

1. Montrer que la résolvante est bien définie si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de T. L'ensemble pour lequel la résolvante est définie est noté $\rho(T)$.

   Si λ est une valeur propre de T alors il existe $x \in \ker(\lambda - T)$ et donc $\lambda - T$ n'est pas inversible. Réciproquement si λ n'est pas valeur propre de T alors $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ et donc l'image de $\lambda - T$ est tout l'espace vectoriel donc $\lambda - T$ est inversible. A remarquer que ce sens est vrai uniquement en dimension finie.

2. Montrer que

   $$R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T) = (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_1}(T) R_{\lambda_2}(T) .$$

   Nous avons

   $$\begin{aligned}(\lambda_1 - T)(R_{\lambda_1}(T) - R_{\lambda_2}(T))(\lambda_2 - T) &= (\lambda_1 - T)\left((\lambda_1 - T)^{-1} - (\lambda_2 - T)^{-1}\right)(\lambda_2 - T) \\ &= (\lambda_2 - T) - (\lambda_1 - T) = \lambda_2 - \lambda_1 .\end{aligned}$$

Si λ est une valeur propre d'une matrice T, le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ est

$$P_\lambda(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-\lambda|=\delta} R_z(T)\,\mathrm{d}z .$$

3 Calculer les projecteurs de la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres sont données par les zéro de

$$\det(\lambda - T) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \,,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = 2\,.$$

La résolvante est donnée par

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\det(\lambda I - T)} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda-1)^{-1} & -(\lambda-1)^{-1}(\lambda-2)^{-1} \\ 0 & (\lambda-2)^{-1} \end{pmatrix} .$$

Par le théorème des résidus, les projecteur sur les sous-espaces propres sont

$$P_{\lambda_1}(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-\lambda_1|=\delta} R_z(T)\,\mathrm{d}z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$P_{\lambda_2}(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-\lambda_2|=\delta} R_z(T)\,\mathrm{d}z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

4 Montrer que P_λ est un projecteur, *i.e.* $P_\lambda(T)P_\lambda(T) = P_\lambda(T)$.

Soit γ_i la courbe définie par $|z_i - \lambda| = \delta_i$ pour $i = 1, 2$. Nous avons

$$\begin{aligned} P_\lambda(T)P_\lambda(T) &= \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} R_{z_1}(T)R_{z_2}(T)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z_2 - z_1}\left(R_{z_1}(T) - R_{z_2}(T)\right)\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1 \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_{\gamma_1} R_{z_1}(T)\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z_2 - z_1}\mathrm{d}z_2\right)\mathrm{d}z_1 \right. \\ &\qquad \left. - \int_{\gamma_2} R_{z_2}(T)\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z_2 - z_1}\mathrm{d}z_1\right)\mathrm{d}z_2\right] \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\int_{\gamma_1} R_{z_1}(T)\,\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_1)\,\mathrm{d}z_1 + \int_{\gamma_2} R_{z_2}(T)\,\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2)\,\mathrm{d}z_2\right] , \end{aligned}$$

où Ind_γ est l'indice de la courbe γ,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} .$$

Il y a deux cas a distinguer. Premièrement si $\delta_1 < \delta_2$, alors $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_1) = 1$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2) = 0$ et donc le résultat annoncé est prouvé. Finalement si $\delta_1 > \delta_2$, alors les indices sont inversés $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_1) = 0$ et $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2) = 1$ et le résultat est également démontré.

Si f est une fonction holomorphe dans un domaine D et γ est une courbe simple dans D alors, la fonction d'une matrice T est définie par

$$f(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma f(z)R_z(T)\,\mathrm{d}z\,.$$

5 Montrer que

$$f_1(T)f_2(T) = (f_1 \cdot f_2)(T)\,.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
f_1(T)f_2(T) &= \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} f_1(z_1)f_2(z_2)R_{z_1}(T)R_{z_2}(T)\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1 \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{f_1(z_1)f_2(z_2)}{z_2-z_1}\left(R_{z_1}(T)-R_{z_2}(T)\right)\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_1 \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Bigg[\int_{\gamma_1} f_1(z_1)R_{z_1}(T)\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f_2(z_2)}{z_2-z_1}\mathrm{d}z_2\right)\mathrm{d}z_1 \\
&\qquad - \int_{\gamma_2} f_2(z_2)R_{z_2}(T)\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f_1(z_1)}{z_2-z_1}\mathrm{d}z_1\right)\mathrm{d}z_2\Bigg] \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Bigg[\int_{\gamma_1} f_1(z_1)R_{z_1}(T)f_2(z_1)\,\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_1)\,\mathrm{d}z_1 \\
&\qquad + \int_{\gamma_2} f_2(z_2)R_{z_2}(T)f_1(z_2)\,\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2)\,\mathrm{d}z_2\Bigg]
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème des résidus pour la dernière étape. En prenant par exemple le cas où γ_1 est à l'intérieur de γ_2, alors

$$f_1(T)f_2(T) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1} f_1(z_1)f_2(z_1)R_{z_1}(T)\,\mathrm{d}z_1 = \left(f_1\cdot f_2\right)(T)\,.$$