Méthodes perturbatives : Corrigé 8

1 Série de Neumann

Soit T une matrice.

1. Montrer que

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \, .$$

Nous avons

$$\left\|T^{n+1}x\right\| = \|T^n T x\| \leq \|T^n\| \, \|Tx\| \leq \|T^n\| \, \|T\| \, \|x\| \, ,$$

si bien que

$$\left\|T^{n+1}\right\| \leq \|T^n\| \, \|T\| \, ,$$

et le résultat est démontré par récurrence sur n.

2. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

converge si $\|T\| < 1$.

Nous avons

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n \, ,$$

et donc la série converge si $\|T\| < 1$.

3. Montrer que si la série converge, alors

$$(1 - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \, .$$

Nous avons

$$(1 - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = 1 \, ,$$

et donc le résultat annoncé est démontré sous hypothèse que la série converge.

4. Si $\|T\| < 1$, démontrer que

$$\left\|(1 - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \, .$$

En utilisant les résultats précédents,

$$\left\|(1 - T)^{-1}\right\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|} \, .$$

2 Série de la résolvante

Pour T une matrice et $\lambda_0 \in \rho(T)$, soit

$$A_n = (-1)^n \, R_{\lambda_0}(T)^{n+1} \, .$$

1. Démontrer que

$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, (\lambda - \lambda_0)^n$$

pour

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1} \ .$$

En particulier cela montre que la résolvante est analytique et que $\rho(T)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^2$.

Nous avons

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T) + (\lambda - \lambda_0) = (\lambda_0 - T)\left(1 + (\lambda - \lambda_0)\, R_{\lambda_0}(T)\right) \ ,$$

si bien que

$$R_\lambda(T) = (\lambda - T)^{-1} = \left(1 + (\lambda - \lambda_0)\, R_{\lambda_0}(T)\right)^{-1} R_{\lambda_0}(T) \, .$$

Lorsque

$$|\lambda - \lambda_0|\, \|R_{\lambda_0}(T)\| < 1 \, ,$$

le premier terme peut-être écrit comme une série de Neumann

$$R_\lambda(T) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (\lambda - \lambda_0)^n\, R_{\lambda_0}(T)^n\right) R_{\lambda_0}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, (\lambda - \lambda_0)^n \ .$$

De plus la série converge normalement.

2. Montrer que

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R_\lambda(T)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \ .$$

En prenant la représentation en série de la résolvante,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R_\lambda(T)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} (\lambda - \lambda_0)^k\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = n!\, A_n \, .$$

3 Normes matricielles

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, la p-norme est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

pour $1 < p < \infty$ et lorsque $p = \infty$ par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i| \ .$$

Chacune de ces normes induit une norme sur les opérateurs définie par

$$\|T\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Tx\|_p \ .$$

1. Si A est une matrice, montrer que

$$\|A\|_1 = \sup_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad\qquad \|A\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \sup_{\|x\|_1=1} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \\ &\leq \sup_{\|x\|_1=1} \left(\sup_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) = \sup_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ ,\end{aligned}$$

et en prenant e_j le vecteur unité dans la direction j, comme $\|e_j\|_1 = 1$, alors

$$\sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \sup_{j=1,\ldots,n} \|Ae_j\|_1 = \sup_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ ,$$

et la première égalité est démontrée.
Pour la seconde,

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \\ &\leq \sup_{\|x\|_\infty=1} \left(\sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)\left(\sup_{j=1,\ldots,n} |x_j|\right) = \sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .\end{aligned}$$

En définissant s_i le vecteur ayant pour composantes

$$(s_i)_j = \begin{cases} \bar{a}_{ij}/|a_{ij}| \ , & a_{ij} \neq 0 \, , \\ 1 \, , & a_{ij} = 0 \, , \end{cases}$$

alors $\|s_i\|_\infty = 1$ et donc la borne est atteinte,

$$\sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geq \sup_{i=1,\ldots,n} \|As_i\|_\infty \geq \sup_{i=1,\ldots,n} |(As_i)_i| = \sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \sup_{y\neq 0} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|_2 \, \|y\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} \sup_{\|y\|_2=1} |(Ax,y)| \ .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(x,y)| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2 \ ,$$

alors
$$\sup_{x\neq 0}\sup_{y\neq 0}\frac{|(Ax,y)|}{\|x\|_2\,\|y\|_2}\leq \sup_{x\neq 0}\sup_{y\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\leq \|A\|_2\ .$$
En prenant $y = Ax$ alors l'inégalité est atteinte et donc le résultat est démontré.

3. Montrer que pour tout x, y et c positifs
$$xy \leq \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2c}y^2\ .$$

Nous avons
$$0 \leq (cx-y)^2 = c^2x^2 - 2cxy + y^2\ ,$$
et donc l'inégalité voulue s'obtient en divisant par $2c$.

4. En combinant les deux points précédents, démontrer que
$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\,\|A\|_\infty}\,.$$
<u>Remarque :</u> pour une version sur des espaces fonctionnel, voir Peter D. Lax, *Functional Analysis* (2002), p. 176.

Par le point 3.
$$\begin{aligned}
|(Ax,y)| &= \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_i|\,|y_j| \leq \sum_{i,j=0}^{n}|a_{ij}|\left(\frac{c}{2}|x_i|^2+\frac{1}{2c}|y_j|^2\right)\\
&\leq \frac{c}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)\left(\sup_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)+\frac{1}{2c}\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^2\right)\left(\sup_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)\\
&\leq \frac{c}{2}\|x\|_2^2\,\|A\|_\infty+\frac{1}{2c}\|y\|_2^2\,\|A\|_1\ .
\end{aligned}$$
Ainsi en utilisant le point 2.
$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1}\sup_{\|y\|_2=1}|(Ax,y)| \leq \frac{c}{2}\|A\|_\infty + \frac{1}{2c}\|A\|_1\ ,$$
et donc l'inégalité est démontrée en posant $c=\sqrt{\|A\|_1\,/\,\|A\|_\infty}$.