Introduction aux méthodes perturbatives – Corrigé 9

14 mai 2015

Elements de réponses pour l'Exercice 1

On introduit l'opérateur A donné par $Af(x) = f'(x) + xf(x)$, de sorte que $A^*f(x) = -f'(x) + xf(x)$. On rappelle alors que $T = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A)$, et on trouve que

$$T_1 = \frac{1}{2}(A + \eta A^*)$$

où $\eta = 1$ pour le cas $T_1 f(x) = xf(x)$ et $\eta = -1$ pour le cas $T_1 f(x) = f'(x)$. On introduit la résolvante R_z de T définie par $R_z = (z - T)^{-1}$. On rappelle qu'on a une base orthonormée $\psi_0, \psi_1, \dots$ avec

$$T\psi_n = \lambda_n^{(0)}\psi_n = (2n+1)\psi_n, \quad R_z\psi_n = \frac{1}{z-(2n+1)}\psi_n, \quad A\psi_n = \sqrt{2n}\psi_{n-1}, \quad A^*\psi_n = \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}\ .$$

On a $A\psi_0 = 0$, et on se permet par la suite d'écrire des expressions du type $n(n-1)\psi_{n-2}$, même lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, en comprenant alors qu'une telle expression vaut zéro. Fixons n. On a vu au cours que la énième valeur propre $T(\varepsilon)$ s'exprime formellement

$$\lambda_n^{(\varepsilon)} = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon \frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon^j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon^j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_j = \text{Rés}_{z=\lambda_n^{(0)}} \left[\langle \psi_n, (T_1 R_z)^{j+1}\psi_n\rangle\right] \\ b_j = \text{Rés}_{z=\lambda_n^{(0)}} \left[\langle \psi_n, R_z(T_1 R_z)^{j}\psi_n\rangle\right] \end{cases} .$$

Les coefficients a_j et b_j dépendent en général de n. Cependant dans le cas particulier étudié ici, on verra que $\lambda_n^{(\varepsilon)} - \lambda_n^{(0)}$ ne dépend pas de n [on sait du cours que le résultat exact ne dépend pas de n]. On va calculer les coefficients dans l'ordre $b_0, a_0, b_1, a_1, b_2, a_2$,... On a tout d'abord

$$R_z\psi_n = \frac{1}{z-(2n+1)}\psi_n \tag{1}$$

d'où

$$\text{Rés}_{z=2n+1}\left[\langle \psi_n, R_z\psi_n\rangle\right] = \text{Rés}_{z=2n+1}\left[\frac{1}{z-(2n+1)}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1}\ .$$

En multipliant (1) à gauche par T_1 on trouve,

$$\begin{aligned} T_1 R_z\psi_n &= \frac{1}{z-(2n+1)}T_1\psi_n = \frac{1}{2(z-(2n+1))}(A + \eta A^*)\psi_n \\ &= \frac{1}{2(z-(2n+1))}(\sqrt{2n}\psi_{n-1} + \eta\sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}) \end{aligned} \tag{2}$$

d'où on tire immédiatement que

$$\langle \psi_n, (T_1 R_z)\psi_n\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}\ .$$

En multipliant à gauche (2) par R_z on trouve

$$\begin{aligned} R_z T_1 R_z\psi_n &= \frac{1}{2(z-(2n+1))}R_z(\sqrt{2n}\psi_{n-1} + \eta\sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2(z-(2n+1))}\left\{\frac{\sqrt{2n}}{z-(2n-1)}\psi_{n-1} + \eta\frac{\sqrt{2(n+1)}}{z-(2n+3)}\psi_{n+1}\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

On trouve alors

$$\langle \psi_n, (R_z T_1 R_z)\psi_n\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}\ .$$

En multipliant maintenant(3) à gauche par T_1, on obtient

$$\begin{aligned} (T_1 R_z)^2\psi_n &= \frac{1}{2(z-(2n+1))}\left\{\frac{\sqrt{2n}}{z-(2n-1)}T_1\psi_{n-1} + \eta\frac{\sqrt{2(n+1)}}{z-(2n+3)}T_1\psi_{n+1}\right\} \\ &= \frac{1}{4(z-(2n+1))}\left\{\frac{\sqrt{2n}}{z-(2n-1)}(\sqrt{2(n-1)}\psi_{n-2} + \eta\sqrt{2n}\psi_n)\right. \\ &\qquad \left. + \eta\frac{\sqrt{2(n+1)}}{z-(2n+3)}(\sqrt{2(n+1)}\psi_n + \eta\sqrt{2(n+2)}\psi_{n+2}\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\text{Rés}_{z=2n+1}\left[\langle\psi_n,(R_zT_1)^2\psi_n\rangle\right] &= \text{Rés}_{z=2n+1}\left[\eta\frac{1}{4(z-(2n+1))}\left[\frac{2n}{z-(2n-1)}+\frac{2(n+1)}{z-(2n+3)}\right]\right] \\
&= \frac{\eta}{4}\left(\frac{2n}{(2n+1)-(2n-1)}+\frac{2(n+1)}{(2n+1)-(2n+3)}\right) \\
&= \frac{\eta}{4}\left(\frac{2n}{2}+\frac{2(n+1)}{-2}\right) = -\frac{\eta}{4} \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{\eta}{4}}\ .
\end{aligned}$$

On peut continuer ainsi. En multipliant à gauche par R_z on calcule $b_2 \neq 0$, puis en multipliant à gauche par T_1 on trouve $a_2 = 0$. Puis, en multipliant à gauche par R_z on trouve $b_3 = 0$, et ainsi de suite. Les b_n pairs sont non-nuls et les a_n pairs sont toujours nuls.

Ceci nous permet de calculer

$$\lambda_n^{(\varepsilon)} - \lambda_n^{(0)} = \varepsilon\frac{-\frac{\eta}{4}\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3)}{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} = \varepsilon\Big(-\frac{\eta}{4}\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big)\left(1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) = -\frac{\eta}{4}\varepsilon^2+\mathcal{O}(\varepsilon^4)\ .$$

Dans le cas où $T_1f(x) = xf(x)$ ($\eta = 1$), on obtient $\lambda_n^{(\varepsilon)} = \lambda_n^{(0)} - \frac{\varepsilon^2}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$. Dans le cas $T_1f(x) = f'(x)$ ($\eta = -1$), on obtient $\lambda_n^{(\varepsilon)} = \lambda_n^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{4} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$. Ceci correspond bien aux valeurs propres calculées analytiquement au cours.