Introduction aux méthodes perturbatives – Corrigé 10

22 mai 2015

Elements de réponses pour l'Exercice 1

On résout cet exercice exactement comme celui de la semaine passée. On rappelle que

$$Af(x) = f'(x) + xf(x) \ , \qquad A^*f(x) = -f'(x) + xf(x) \ , \qquad T = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A) \ ,$$

et

$$T\psi_n = \lambda_n^{(0)}\psi_n = (2n+1)\psi_n, \quad R_z\psi_n = \frac{1}{z-(2n+1)}\psi_n, \quad A\psi_n = \sqrt{2n}\psi_{n-1}, \quad A^*\psi_n = \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1} \ .$$

On a

$$T_1 = \frac{1}{4}(A + A^*)(A - A^*) \ .$$

On calcule les premiers termes de la série

$$\lambda_n^{(\varepsilon)} = \lambda_n^{(0)} + \varepsilon\frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j\varepsilon^j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j\varepsilon^j} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_j = \text{Rés}_{z=\lambda_n^{(0)}}\left[\langle\psi_n, (T_1R_z)^{j+1}\psi_n\rangle\right] \\ b_j = \text{Rés}_{z=\lambda_n^{(0)}}\left[\langle\psi_n, R_z(T_1R_z)^{j}\psi_n\rangle\right] \end{cases} .$$

On commence par

$$R_z\psi_n = \frac{1}{z-(2n+1)}\psi_n \tag{1}$$

d'où

$$\text{Rés}_{z=2n+1}\left[\langle\psi_n, R_z\psi_n\rangle\right] = \text{Rés}_{z=2n+1}\left[\frac{1}{z-(2n+1)}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1} \ .$$

En multipliant à gauche par T_1, il vient

$$\begin{aligned} T_1R_z\psi_n &= \frac{1}{4(z-(2n+1))}(A+A^*)(A-A^*)\psi_n = \frac{1}{4(z-(2n+1))}(A+A^*)(\sqrt{2n}\psi_{n-1} - \sqrt{2(n+1)}\psi_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4(z-(2n+1))}(\sqrt{2n}\sqrt{2n-1}\psi_{n-2} + 2n\psi_n - 2(n+1)\psi_n + \sqrt{2(n+1)}\sqrt{2(n+2)}\psi_{n+2}) \ . \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z=2n+1}\left[\langle\psi_n, T_1R_z\psi_n\rangle\right] &= \text{Rés}_{z=2n+1}\frac{1}{4(z-(2n+1))}(2n - 2(n+1)) \\ &= \text{Rés}_{z=2n+1}\frac{-2}{4(z-(2n+1))} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\lambda_n^{(\varepsilon)} - \lambda_n^{(0)} = \varepsilon\frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon)}{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)} = -\frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ .$$

Au premier ordre, la correction ne dépend pas de n. Cependant, les termes d'ordres supérieurs dépendent de n. Cette expansion correspond bien au premier ordre du résultat trouvé au cours

$$\lambda_n^{(\varepsilon)} = -\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}(2n+1) \ .$$