Méthodes perturbatives : Corrigé 11

1 Principe d'incertitude ou inégalité de Hardy

Pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ démontrer que

$$\left\| \frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|} \right\| \leq 2 \left\| \boldsymbol{\nabla} \psi \right\| ,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire explicitement

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(\boldsymbol{x})|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, .$$

Remarque : cette inégalité a un rôle fondamental dans l'étude de nombreuses équations aux dérivées partielles, notamment les équations de Navier-Stokes.

En intégrant par partie, nous avons

$$2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi}{|\boldsymbol{x}|^2} \bar{\psi} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(|\psi|^2 \right)}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x} \, |\psi|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \right) |\psi|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, .$$

Comme $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors la première intégrale est nulle et puisque

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \right) = \sum_i \partial_i \frac{x_i}{\sum_j x_j^2} = \frac{3}{\sum_j x_j^2} - 2 \sum_i \frac{x_i^2}{(\sum_j x_j^2)^2} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2} ,$$

alors nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(\boldsymbol{x})|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi}{|\boldsymbol{x}|^2} \bar{\psi} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -2 \left(\boldsymbol{\nabla}\psi, \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \psi \right) .$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(\boldsymbol{x})|^2}{|\boldsymbol{x}|^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq 2 \left\| \boldsymbol{\nabla}\psi \right\| \left\| \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} \psi \right\| = 2 \left\| \boldsymbol{\nabla}\psi \right\| \left\| \frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|} \right\| ,$$

ou autrement dit

$$\left\| \frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|} \right\|^2 \leq 2 \left\| \boldsymbol{\nabla}\psi \right\| \left\| \frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|} \right\| ,$$

et donc en divisant les deux membres par $\left\| \frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|} \right\|$, l'inégalité est démontrée.

2 Perturbation de l'atome d'hydrogène

L'Hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$T = -\Delta - V \qquad \text{avec} \qquad V = \frac{2}{r}\,.$$

Montrer qu'avec la perturbation

$$T_1 = \frac{1}{r}\,,$$

l'opérateur $T(\varepsilon) = T + \varepsilon T_1$ est une famille analytique de type A.

Tout d'abord, le domaine de V comprend celui de $-\Delta$. En effet, $D(-\Delta) \subset L^2 = D(V)$. Pour voir que $D(V) = L^2$, on procède ainsi. On peut écrire $\frac{2}{r} \leq \frac{2}{r}1_{\{r\leq 1\}} + 2$, où 1_A est la fonction indicatrice de A. Ainsi, pour toute fonction $\psi \in L^2$, on a $\|V\psi\| \leq 2\|\psi\| + \|\frac{2}{r}1_{\{r\leq 1\}}\psi\| \leq 2\|\psi\| + \|\frac{2}{r}1_{\{r\leq 1\}}\|\,\|\psi\|$, où la dernière inégalité est Cauchy-Schwarz. On obtient donc bien que $\|V\psi\| < \infty$, puisque $\|\frac{1}{r}1_{\{r\leq 1\}}\|^2 = \int_0^1 \frac{1}{r^2}4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi$. Bien sûr les mêmes considérations s'appliquent à T_1.

Nous allons toujours considérer que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, car par un argument de complétion, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ peut être étendu au domaine de T. En utilisant l'inégalité de l'exercice précédent,

$$\begin{aligned} \|V\psi\|^2 = 4\left\|\frac{\psi}{|\boldsymbol{x}|}\right\|^2 &\leq 16\,\|\boldsymbol{\nabla}\psi\|^2 = 16\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &\leq 16\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\bar{\psi}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} - 16\int_{\mathbb{R}^3}\psi\Delta\bar{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= 0 + 16\,(\psi, -\Delta\psi) \leq 16\,\|\psi\|\,\|-\Delta\psi\|\ , \end{aligned}$$

où on a utilisé que ψ est à support compact et le théorème de Gauss pour trouver $\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\bar{\psi}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$, et où la toute dernière inégalité vient de Cauchy-Schwarz. En utilisant l'inégalité

$$\frac{1}{2}\left(A/C - BC\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad AB \leq \frac{A^2}{2C^2} + \frac{C^2B^2}{2}\,,$$

valable pour tout $A, B, C > 0$ avec $A = \|-\Delta\psi\|$, et $B = \|\psi\|$, alors

$$\|V\psi\|^2 \leq 16AB \leq \frac{8}{C^2}\,\|-\Delta\psi\|^2 + 8C^2\,\|\psi\|^2\ .$$

En choisissant $C > \sqrt{8}$, et en utilisant que $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \leq |c_1| + |c_2|$, on trouve

$$\|V\psi\| \leq a\,\|-\Delta\psi\| + b\,\|\psi\|\ , \quad 0 < a < 1 \text{ et } b > 0\,, \tag{1}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|V\psi\| \leq a\,\|-\Delta\psi\| + b\,\|\psi\| &= a\,\|T\psi + V\psi\| + b\,\|\psi\| \\ &\leq a\,\|T\psi\| + a\,\|V\psi\| + b\,\|\psi\|\ , \end{aligned}$$

et donc puisque $a < 1$,

$$2\|T_1\psi\| = \|V\psi\| \leq \frac{a}{1-a}\,\|T\psi\| + \frac{b}{1-a}\,\|\psi\|\ .$$