Introduction aux méthodes perturbatives – Série 1, corrigé

28 février 2014

Exercice 1

Montrer que si f est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0), alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Démonstration : Prenons $\partial_x u(x_0, y_0)$. Si cette dérivée existe, alors elle est définie par

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \lim_{h \to o} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} . \tag{1}$$

Puisque f est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0), nous avons en particulier, par définition et où nous notons $(\mathrm{A})_{ij} = a_{ij}$,

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + r_1(x, y) \left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| . \tag{2}$$

Insérant (2) évaluée en $(x_0 + h, y_0)$ dans (1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(a_{11}(x_0 + h - x_0) + a_{12}(y_0 - y_0) + r_1(x_0 + h, y_0) \cdot h \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \left(a_{11} + r_1(x_0 + h, y_0) \right) = a_{11} + r_1(x_0, y_0) = a_{11} . \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré simultanément que $\partial_x u(x_0, y_0)$ existe et que c'est le coefficient a_{11} de la matrice A. De coefficient en coefficient on démontre ainsi l'énoncé.

Exercice 2

Montrer que l'existence des dérivées partielles n'implique pas la $\mathbb{R}$-différentiabilité et même pas la continuité. On travaille ici avec des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Démonstration : Prenons la fonction $f_1(z)$ définie par

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} , \quad v_1(x, y) = 0 .$$

Les dérivées partielles s'obtiennent aisément dans tout $\mathbb{R}^2$, y compris à l'origine. Ainsi,

$$\begin{aligned} \partial_x f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(h, 0) - f_1(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 . \\ \partial_y f_1(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(0, h) - f_1(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 . \end{aligned}$$

Cependant, en passant en représentation polaire, on constate que

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} f_1(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \lim_{r \to 0} \begin{cases} \dfrac{r^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} & , \text{ pour } r > 0 \\ 0 & , \text{ pour } r = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) & , \text{ pour } r > 0 \\ 0 & , \text{ pour } r = 0 \end{cases} , \end{aligned}$$

qui n'est pas continue à l'origine.

Prenons la fonction $f_2(z)$ définie par

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ pour } (x, y) = (0, 0) \end{cases} , \quad v_2(x, y) = 0 .$$

Cette fonction est continue à l'origine. En effet, $f_2(0,0)=0$ et en coordonnées polaires on a pour $r\neq 0$

$$|f_2(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = |\frac{r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)}{r^2}| \leq r \ .$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
\partial_x f_2(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \ . \\
\partial_y f_2(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(0,h)-f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, si f_2 était différentiable, on aurait que

$$f_2(t,t) = \partial_x f_2(0,0)t + \partial_y f_2(0,0)t + o(t) = 0 + o(t)$$

alors qu'en réalité

$$f_2(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{1}{2}t \neq o(t)$$

ce qui est une contradiction. On peut vérifier aussi que les dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\partial_x f_2(x,y) &= \frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \ , \\
\partial_y f_2(x,y) &= \frac{x^2(x^2+y^2)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \ ,
\end{aligned}$$

ne sont pas continues à l'origine. En effet, en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\partial_x f_2(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \lim_{r\to 0}\frac{2r^4\cos(\theta)\sin(\theta)^3}{r^4} = 2\cos(\theta)\sin(\theta)^3 \ , \\
\lim_{r\to 0}\partial_y f_2(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \lim_{r\to 0}\frac{r^4(1-\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2)}{r^4} = 1-\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2 \ .
\end{aligned}$$

Exercice 3

Une fonction $\mathbb{C}$-différentiable est $\mathbb{R}$-différentiable et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \ \partial_y u = -\partial_x v \ .$$

Démonstration : Pour pouvoir écrire une fonction $\mathbb{C}$-différentiable selon la définition de $\mathbb{R}$-différentiabilité il suffit de vérifier qu'il existe une matrice A telle que

$$f'(z_0)(z-z_0) \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \ .$$

Nous notons $z_* = z - z_0$, avec $z = x+iy$, afin d'alléger la notation. Puisque $f'(z_0)$ est un nombre complexe, notons-le $a+ib$. Ainsi

$$f'(z_0)z_* = ax_* - by_* + ibx_* + iay_* \ .$$

Il nous faut donc simplement une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Ensuite, puisque nous avons une fonction $\mathbb{R}$-différentiable, nous savons que

$$\begin{aligned}
a_{11} = \partial_x u \ , \ a_{12} = \partial_y u \ , \\
a_{21} = \partial_x v \ , \ a_{22} = \partial_y v \ .
\end{aligned}$$

Puisque A a la structure donnée en (3) puisqu'elle est aussi $\mathbb{C}$-différentiable, il vient nécessairement que

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \ \partial_y u = -\partial_x v \ .$$

Exercice 4

Montrer que

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{, pour } z \neq 0 \\ 0 & \text{, pour } z = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles selon x et y en $(x, y) = 0$ qui satisfont les conditions de Cauchy-Riemann, sans pour autant être $\mathbb{C}$-différentiable en $z = 0$.

Démonstration : En notation vectorielle, la fonction $f(z)$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \end{pmatrix} & \text{, pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, pour } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Les dérivées partielles en $(0, 0)$ sont définies par

$$\begin{aligned} \partial_x u(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1 \ , \\ \partial_y u(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \ , \\ \partial_x v(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \ , \\ \partial_y v(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1 \ , \end{aligned}$$

ce qui satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. En revanche,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in U \\ z\neq 0}} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z^5}{|z|^4} - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^4}{|z|^4} \\ &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} \frac{(r\cos(\theta) + ir\sin(\theta))^4}{r^4} = h(\theta) \ . \end{aligned}$$

La fonction h n'étant pas égale à une constante, la limite ne peut exister, et donc la fonction n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable.