Introduction aux méthodes perturbatives – Série 2, corrigé

7 mars 2014

Exercice 1 Soit ρ le rayon de convergence de la série

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \ .$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} f : D(c,\rho) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = s \end{aligned}$$

est holomorphe et

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k \ ,$$

pour tout $z \in D(c,\rho)$ (même rayon de convergence), avec $b_k = a_{k+1}(k+1)$.
Démonstration : Tout d'abord, le rayon de convergence de la série

$$s' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k$$

est

$$\rho' = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{1/k}(k+1)^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}} = \rho \ , \tag{1}$$

qui est le même que celui de s. Ainsi, s' converge dans $D(c,\rho)$. Il reste à montrer que f est holomorphe, et que sa dérivée coincide avec s'. Ceci n'est pas trivial, car on ne peut pas a priori permuter les opérations de sommation et de dérivation. On peut justifier cette permutation en appliquant de façon appropriée le théorème de la convergence dominée. Mais on présente ici une preuve élémentaire qui n'utilise pas ce théorème.

On rappelle que toute fonction holomorphe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admet pour tout $h \in \mathbb{C}$ le développement

$$g(z_0+h) = g(z_0) + hg'(z_0) + h^2 \int_0^1 g''(z_0+th)(1-t)dt \ .$$

(On peut le montrer en appliquant ce résultat bien connu d'analyse réelle sur Reg et Img et en utilisant Cauchy-Riemann.) En particulier, en posant $h = z - z_0$ et $g(z) = (z-c)^k$ on a que

$$(z-z_0)^k = (z_0+h-c)^k = (z_0-c)^k + (z-z_0)k(z_0-c)^{k-1} + (z-z_0)^2 \int_0^1 k(k-1)(z_0+t(z-z_0)-c)^{k-2}(1-t)dt \ .$$

Fixons $z_0 \in D(c,\rho)$. Posons $R = \frac{1}{2}(\rho+|z_0-c|) < \rho$. Il existe ainsi un disque $D(z_0,r)$ vérifiant $D(z_0,r) \subset D(c,R)$. Pour tout $z \in D(z_0,r)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k - \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z-c)^k-(z_0-c)^k}{z-z_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[k(z_0-c)^{k-1} + (z-z_0)\int_0^1 k(k-1)(z_0+t(z-z_0)-c)^{k-2}(1-t)dt \right] \ . \end{aligned}$$

Par convexité, on a que pour tout $t \in [0,1]$, $z_0+t(z-z_0) \in D(z_0,r) \subset D(c,R)$. Mais alors $|z_0+t(z-z_0)-c|^k < R^k$, d'où

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k \int_0^1 k(k-1)(z_0+t(z-z_0)-c)^{k-2}(1-t)dt \right| \\ &\quad < \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| k(k-1) R^{k-2} \int_0^1 (1-t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \frac{k(k-1)}{2} R^{k-2} = K \end{aligned}$$

puisque la série converge (par un calcul similaire à (1)). Ainsi on trouve

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k k(z_0-c)^{k-1}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)\int_0^1 k(k-1)(z_0+t(z-z_0)-c)^{k-2}(1-t)dt\right| \\ &< |z-z_0|K\ .\end{aligned}$$

En revenant à la définition, on trouve ainsi bien que

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in D(z_0,r))\\ z\neq z_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k(z_0-c)^{k-1}\ .$$

Exercice 2

Soit la fonction

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\ ,\ \text{sur } D(0,1)\ ,$$

avec

$$a_k=(-1)^k\ ,\ k=0,1,\dots\ .$$

On va faire comme si l'on ne savait pas qu'en réalité $f(z)=\frac{1}{1+z}$, sur $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$. On aimerait calculer la valeur $f(3/2)$ en se servant d'un développement en série en $z=1/2$,

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-\frac{1}{2})^m\ ,\ \text{sur } D\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\ .$$

Démonstration : Rappel : soit une fonction h définie par une série entière $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ dans $D(z_0,\rho)$. Soit $z_1\in D(z_0,\rho)$. Alors la série entière de h en z_1 est $\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_1)^k$, avec

$$d_m=\frac{1}{m!}h^{(m)}(z_1)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{c_k(z_1-z_0)^{k-m}k!}{(k-m)!m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n+m}(z_1-z_0)^n(n+m)!}{n!m!}\ .$$

On prouve maintenant le résultat demandé. On a par le rappel ci-dessus

$$\begin{aligned}b_m&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}(n+m)!}{n!m!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!m!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ &=(-1)^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)^{m+1}=(-1)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\ .\end{aligned}$$

(Rappel $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ est le nombre de façons de placer n boules indistingables dans $m+1$, et aussi le nombre de façon de choisir $m+1$ entiers positifs ou nuls dont la somme vaut n.) Admettons (pour l'exercice), que nous n'ayons à disposition que les coefficients a_k pour $k=0,1,\dots,N$. Le calcul des b_m en est affecté, nous avons

$$b_{m,N}=\sum_{n=0}^{N-m}\frac{a_{n+m}(n+m)!}{2^n n!m!}$$

et donc

$$f_{N,M}(z)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N-m}\frac{a_{n+m}(n+m)!}{2^n n!m!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^m\ ,\ M\leq N\ .$$

Nous allons voir que pour un N fixé, M ne doit pas être choisi maximal pour que l'erreur soit minimale ! Soit

$$|R_{N+1,M+1}(z)|=|f(z)-f_{N,M}(z)|$$

l'erreur que l'on fait quand on n'a qu'un certain nombre N des coefficients a_n (nous calculons cette erreur en comparant au résultat exact que nous connaissons, car dans ce cas simple les "vrais" b_n sont connus). Alors, pour $z = 3/2$,

$$\begin{aligned}
\left| R_{N+1,M+1}\left(\frac{3}{2}\right) \right| &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} b_m - \sum_{m=0}^{M} b_{m,N} \right| \\
&= \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} b_m + \sum_{m=0}^{M} (b_m - b_{m,N}) \right| \\
&\leq \left| (-1)^{M+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{M+2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \right| \\
&+ \left| \sum_{m=0}^{M} \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N-m+1}} \binom{N+1}{m} H\left(1, N+2; N+2-m; -\frac{1}{2}\right) \right| \\
&\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{M+2} \frac{1}{1+\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^{N-m+1}} \binom{N+1}{m}
\end{aligned}$$

où le premier terme d'erreur décroît clairement plus on prend de termes dans la suite tronquée, mais où le deuxième terme quant à lui augmente avec M de sorte qu'il s'agit de trouver un compromis (la fonction H est une fonction hypergéométrique, le résultat a été obtenu grâce à Maple). De plus, on voit que le nombre M depend du nombre N de coefficients a_n que l'on a disposition dans la série tronquée du développement en $z = 0$. La figure ci-dessous présente l'erreur en fonction de M et N (pas la borne calculée ci-dessus).

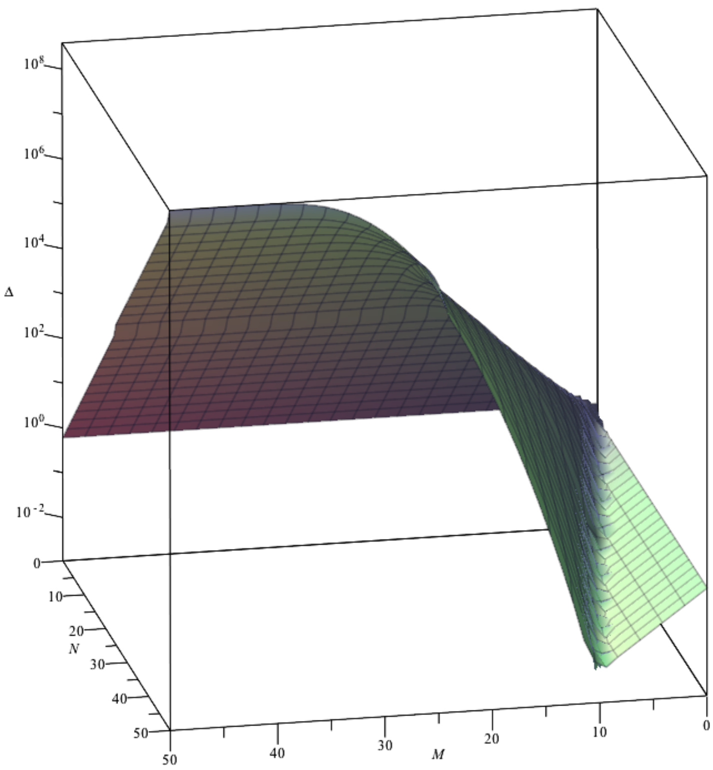

Figure 1 – Erreur en fonction de M et N.