Méthodes perturbatives : Série 3

1 Transformations conformes

Discuter les actions sur le plan complexe des fonctions f suivantes ainsi que de leur réciproque :

1. $$f(z) = \frac{1}{z}\,,$$
2. $$f(z) = z^2\,,$$
3. $$f(z) = \mathrm{e}^z\,.$$

2 Transformation de Borel d'une série convergente

Soit
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^z$$
une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la transformée de Borel de f est la fonction
$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\,.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série définissant B est $+\infty$. Ainsi B est une fonction entière.
2. Soit $0 < r < R$. Montrer qu'il existe $C \geq 0$ tel que
$$|B(t)| \leq C\mathrm{e}^{|t|/r}\,.$$
3. En déduire que l'intégrale
$$L(s) = \int_0^{\infty} B(t)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > R^{-1}$.
4. Pour $\mathrm{Re}\left(z^{-1}\right) > R^{-1}$, soit
$$g(z) = \frac{1}{z} L\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\int_0^{\infty} B(t)\mathrm{e}^{-t/z}\mathrm{d}t\,.$$
Montrer que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in D$ où
$$D = \left\{z \,:\, \mathrm{Re}(z^{-1}) > R^{-1}\right\}\,.$$
5. Considérer les exemples suivants :
(a) $a_n = 1\,,$ (b) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,,$ (b) $a_n = \frac{1}{n+1}\,.$