Méthodes perturbatives : Série 4

1 Exemple de série de Borel

Considérer la série formelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{avec} \qquad a_n = (-1)^n \, n!\,.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de sa transformation de Borel
$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n\,.$$
2. Calculer la continuation analytique de la transformation de Borel et déduire que la série est Borel sommable.
3. Déterminer le domaine d'analyticité de la somme de Borel,
$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/z} B(t) \mathrm{d}t\,,$$
et déterminer son expression lorsque $z > 0$ en fonction de la fonction gamma,
$$\Gamma(n; x) = \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{n-1} \mathrm{d}t\,.$$
4. Montrer que
$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ \mathrm{Re}(z) > 0}} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = a_n\,.$$

2 Somme de Borel

Pour une série formelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,,$$

sa transformation de Borel est

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n\,.$$

En supposant que la série soit Borel sommable, alors la somme de Borel est

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t/z} B(t) \mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que g est analytique dans $D(R) = \left\{ z \,:\, \mathrm{Re}(z^{-1}) > R^{-1} \right\}$ pour un certain $R > 0$.
2. Montrer que
$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D(R)}} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z) = a_n\,.$$