Méthodes perturbatives – Série 6

17 avril 2015

Exercice 1

On se donne la série formelle $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec

$$a_n = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{1+e^t}\Big|_{t=0} \ .$$

On va introduire la somme de Borel g de s et le but sera de calculer $g(1)$ par la méthode de Loeffel.

1. Introduire la fonction B donnée par la série

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \qquad \text{avec } b_n = \frac{a_n}{n!} \ .$$

   Expliciter B et indiquer le rayon de convergence de la série définissant B. En déduire que le rayon de convergence de s est nul.
2. Ecrire la continuation analytique $\tilde{B}$ de B et indiquer son domaine d'analyticité.
3. Calculer b_0, b_1, b_2 à la main.
4. Montrer que s est Borel-sommable. Indiquer le domaine où la somme de Borel g donnée par

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} \tilde{B}(t) dt$$

   existe.
5. Calculer explicitement [1] $g(1)$. [Indication : utiliser que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$].
6. On souhaite maintenant calculer $g(1)$ avec la méthode de Loeffel. On introduit la transformation

$$\varphi(w) = -\beta \ln(1-w) \ .$$

   Choisir le β maximal tel que l'image du disque unité par φ soit contenue dans le domaine d'analyticité de $\tilde{B}$.
7. Introduire la fonction b définie sur $D(0,1)$ comme

$$b(w) = \tilde{B}(\varphi(w)) \ .$$

   Calculer les 3 premiers termes de l'expansion $b(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ (en utilisant les b_k calculés précédemment). Quel est le rayon de convergence de cette série ?
8. A l'aide du code Maple, étudier la convergence de l'approximation de $g(1)$ en fonction de β.

1. On peut le faire ici car on a une forme explicite pour $\tilde{B}$. Ce n'est pas le cas en général. En principe, calculer $\tilde{B}$ par prolongation analytique est très laborieux, d'où l'intérêt de la méthode de Loeffel qui permet de l'éviter !