Méthodes perturbatives : Série 8

1 Série de Neumann

Soit T une matrice.

1. Montrer que
$$\|T^n\| \leq \|T\|^n \, .$$
2. Montrer que la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n$$
converge si $\|T\| < 1$.
3. Montrer que si la série converge, alors
$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \, .$$
4. Si $\|T\| < 1$, démontrer que
$$\left\|(1-T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \, .$$

2 Série de la résolvante

Pour T une matrice et $\lambda_0 \in \rho(T)$, soit
$$A_n = (-1)^n \, R_{\lambda_0}(T)^{n+1} \, .$$

1. Démontrer que
$$R_\lambda(T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, (\lambda - \lambda_0)^n$$
pour
$$|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1} \, .$$
En particulier cela montre que la résolvante est analytique et que $\rho(T)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^2$.
2. Montrer que
$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} R_\lambda(T) \bigg|_{\lambda=\lambda_0} \, .$$

3 Normes matricielles

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, la p-norme est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

pour $1 < p < \infty$ et lorsque $p = \infty$ par

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| \ .$$

Chacune de ces normes induit une norme sur les opérateurs définie par

$$\|T\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Tx\|_p \ .$$

1. Si A est une matrice, montrer que

$$\|A\|_1 = \sup_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ , \qquad \|A\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \sup_{y\neq 0} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|_2 \, \|y\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} \sup_{\|y\|_2=1} |(Ax,y)| \ .$$

3. Montrer que pour tout x, y et c positifs

$$xy \leq \frac{c}{2}x^2 + \frac{1}{2c}y^2 \, .$$

4. En combinant les deux points précédents, démontrer que

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty} \, .$$

   Remarque : pour une version sur des espaces fonctionnel, voir Peter D. Lax, *Functional Analysis* (2002), p. 176.